Seminar:
Grundlagen der Physik von Flüssigkeiten

Die Bernoullische Gleichung

von Andreas Jung

Institut für Metallphysik und Nukleare Festkörperphysik

Gliederung

- Herleitung

- Bernoulli-Gleichung:

$$p + \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2 = p_0$$

- Drucksonden

- Beispiele & Anwendungen

- Die Bernoulli-Gleichung bei (in-)kompressiblen Strömungen

Herleitung (I)

- Für ideale Flüssigkeiten (d.h. keine innere Reibung bzw. nicht viskos) gilt die *Eulersche* Gleichung:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{\vec{v}^2}{2} - (\vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v}) = \vec{F} - \operatorname{grad} P \qquad (1)$$

- Es läßt sich für zwei Sonderfälle ein Integral ableiten:

  a) für *wirbelfrei* Strömungen $(\operatorname{rot} \vec{v} = 0)$ (bzw. Potentialströmungen $(\vec{v} = \operatorname{grad} \Phi)$) und einer Massenkraft $\vec{F}$ mit einem *Potential U* $(\vec{F} = -\operatorname{grad} U)$:

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \operatorname{grad} \Phi}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{\vec{v}^2}{2} - (\vec{v} \times 0) = -\operatorname{grad} U - \operatorname{grad} P$$

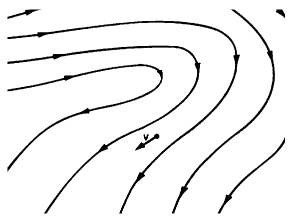
$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{grad} \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\vec{v}^2}{2} + U + P \right)}_{\text{räumlich konstant } = \, const + C(t)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\vec{v}^2}{2} + U + P = const} \quad \text{mit } P = \int \frac{dp}{\rho(p)} \qquad (2)$$

"Druckgleichung"

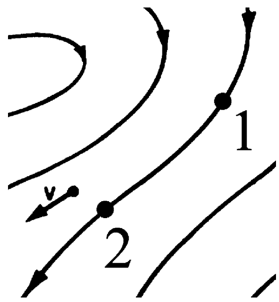
Herleitung (II)

b) für *wirbelbehaftete* Strömungen $(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{v}} \neq 0)$, die *stationär* $(\frac{\partial}{\partial t} = 0)$ sind und eine Massenkraft $\vec{F}$ mit einem *Potential U* $(\vec{F} = -\mathrm{grad}\,U)$ besitzen:



$$\Rightarrow \quad \mathrm{grad}\left(\frac{\vec{\mathrm{v}}^2}{2} + U + P\right) = \vec{\mathrm{v}} \times \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{v}}$$

Man integriere längs einer Stromlinie (d.h. Bogenelement $d\vec{r}$ $\parallel$ Richtung von $\vec{\mathrm{v}}$) von Punkt 1 $\rightarrow$ 2. Es ist dann:



$$\int_1^2 \mathrm{grad}\left(\frac{\vec{\mathrm{v}}^2}{2} + U + P\right) d\vec{r} = \int_1^2 (\vec{\mathrm{v}} \times \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{v}})\, d\vec{r} = 0$$

, da $(\vec{\mathrm{v}} \times \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{v}}) \perp d\vec{r}$. Weiter gilt:

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\vec{\mathrm{v}}^2}{2} + U + P\right) d\vec{r} = d\left(\frac{\vec{\mathrm{v}}^2}{2} + U + P\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{v}^2}{2} + U + P = C} \quad \text{mit} \quad P = \int \frac{dp}{\rho(p)} \qquad (3)$$

$$\mathrm{v}^2 = \vec{\mathrm{v}}^2$$

allgemeine **“Bernoullische Gleichung”**

C ist - spezifisch für die jeweilige Stromlinie - eine *Konstante*. Ist die Strömung *wirbelfrei*, so hat C für den ganzen Flüssigkeitsraum *den selben Wert*.

Bernoulli-Gleichung (I)

- Die Bernoulli-Gleichung ist einer der wichtigsten und meist angewandten Sätze der Strömungslehre und drückt zugleich den *Energiesatz* für Flüssigkeiten aus.

$$C = \frac{v^2}{2} + U + P$$

$$\text{Gesamtenergie} = \begin{array}{c}\text{kinetische}\\ \text{Energie}\end{array} + \begin{array}{c}\text{potentielle}\\ \text{Energie}\end{array} + \text{Druckenergie}$$

- Ein Spezialfall der ‘allgemeine’ Bernoulli-Gleichung:

  Für *inkompressible homogene* (ideale) Flüssigkeiten $(\rho = const,$ $P = \frac{p}{\rho_0})$ und die Schwere als alleinige äußere Kraft $(Z = -g,$ $U = gz)$ wird (3) zu:

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + p = const$$

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0$$

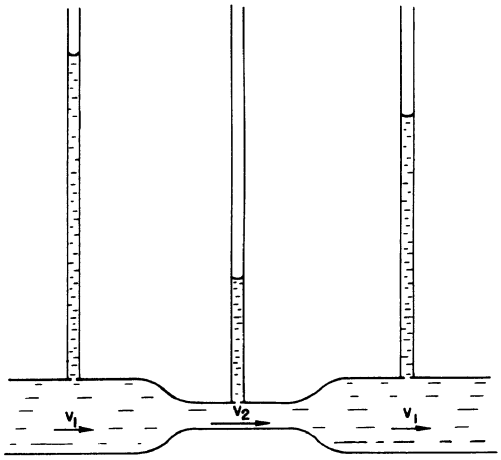
$$\begin{array}{c}\text{hydro}\textit{statische}\\ \text{Druck}\end{array} + \begin{array}{c}\text{hydro}\textit{dynamische}\\ \text{Druck}\\ \text{(oder Staudruck)}\end{array} = \text{Gesamtdruck}$$

Die bekannteste **“Bernoullische Gleichung”** (für z=const)

Bernoulli-Gleichung (II)

Veranschaulichung der
Bernoullischen Gleichung:

"Der hydrostatische Druck p ist um $\frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2$ *kleiner, als der Gesamtdruck* p_0 *(=hydrostatische Druck bei* $\mathrm{v} = 0$ *)"*



Zur Person *'Daniel Bernoulli'* (1700-1782):

Familie Bernoulli ist eine schweizer Gelehrtenfamilie mit niederländischer Herkunft. Daniel ist der Sohn von Johan Bernoulli (Professor für Mathematik in Göttingen). Er war sowohl als Mathematiker & Physiker, wie auch als Mediziner bekannt und lehrte als Professor in Petersburg und Basel.

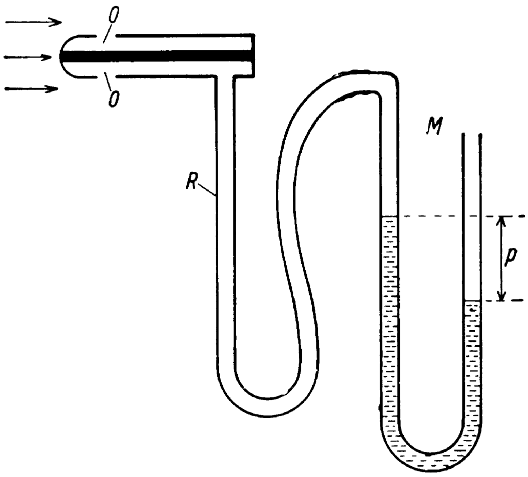
Mit dem Hauptwerk:

"Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii" (1738)

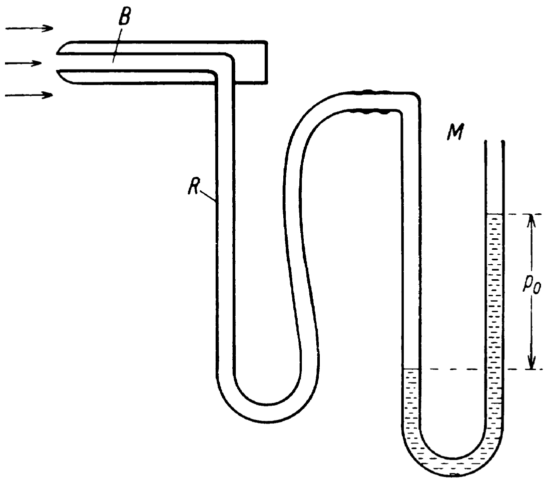
wurde er zum Begründer der Hydrodynamik.

Drucksonden

Zur Messung des hydro*statischen* Drucks und des *Gesamt*drucks existieren folgenden Drucksonden:



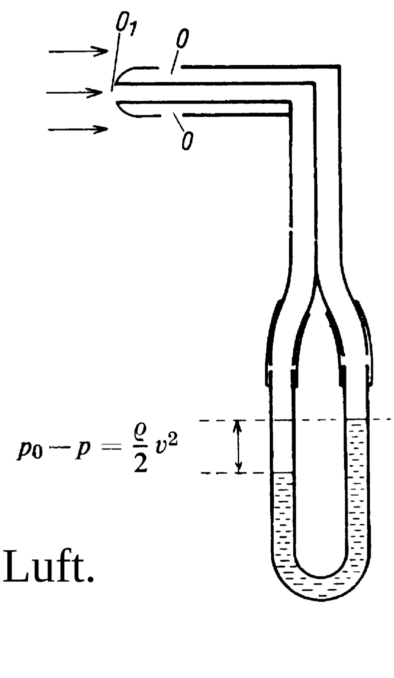
Drucksonde zur Messung des *statischen* Drucks p



Pitot-Rohr (vom französischen Physiker Pitot 1695-1771)

Das Staurohr von Prandtl kombiniert beide obigen Drucksonden:

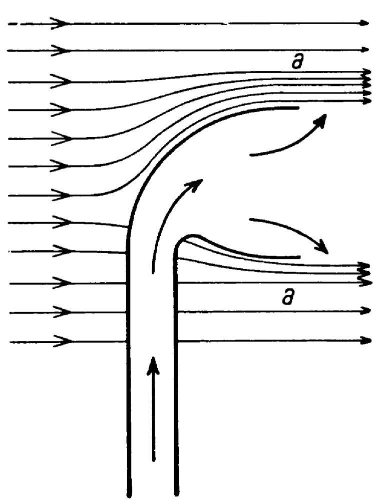
$$p_0 - p = \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v} = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}$$



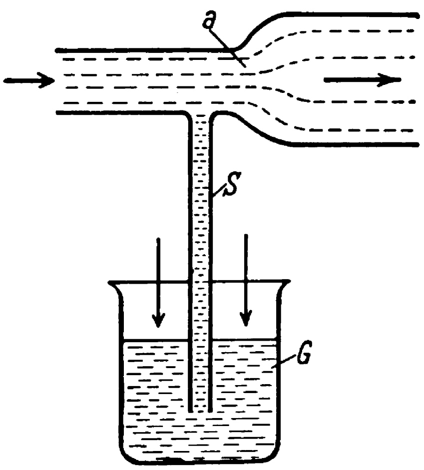
Prandtl (1875-1953), Begründer der modernen Aero- und Hydrodynamik.

Anwendung: Messung der Flug-geschwindigkeit relativ zur umgebenden Luft.

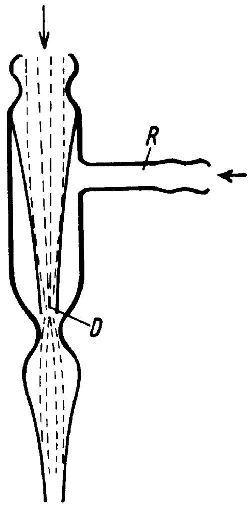
Beispiele & Anwendungen (I)



Schiffsentlüfter



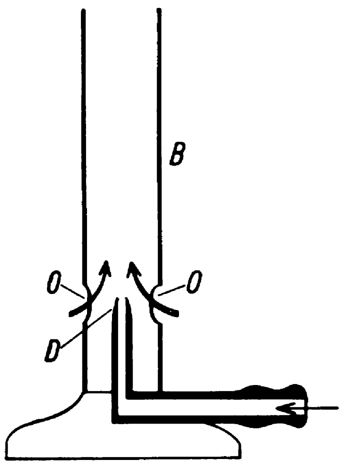
“Wasserpumpe”



Wasserstrahlpumpe von Bunsen

Zur Person *‘Robert Bunsen’* (1811-1899):

Deutscher Chemiker, Professor in Marburg, Breslau und Heidelberg. Er erfand sowohl die Wasserstrahlpumpe, die auf Drücke von bis zu 20 mbar evakuieren kann, wie auch den Bunsenbrenner, der zur besseren Verbrennung des Gases an den Seiten Sauerstoff ansaugt.



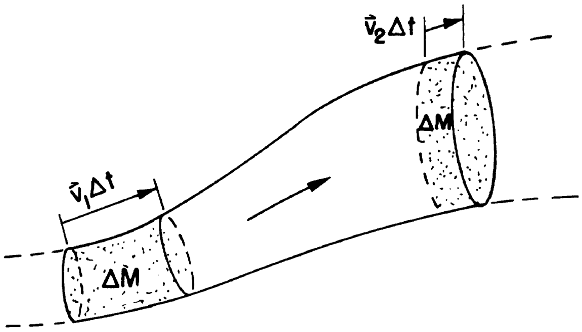
Bunsenbrenner, entwickelt von Bunsen (1855)

Beispiele & Anwendungen (II)

Kontinuitätsgleichung:

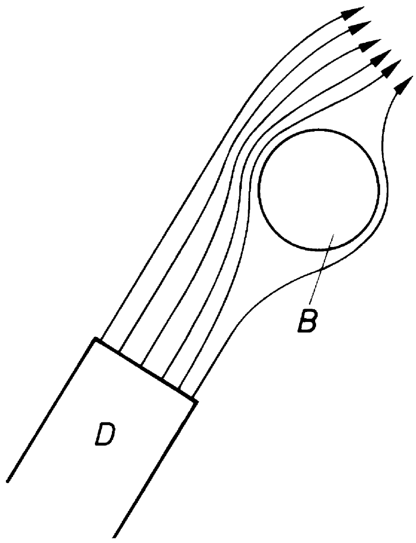
Die Erhaltung der Masse verlangt $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$, d.h. im Falle der Inkompressibilität gilt:

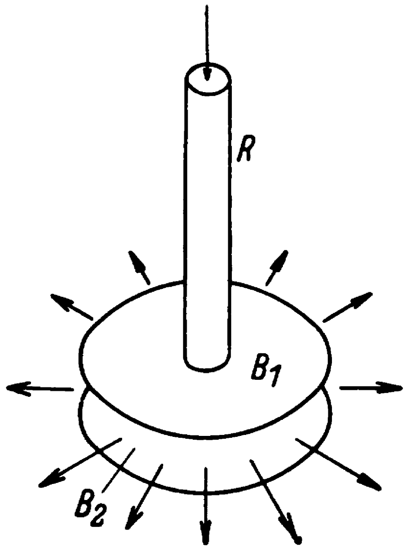
$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{oder} \quad Av = const$$



Durch diese Gleichung und die Bernoulli-Gleichung läßt sich die *Druck*- und *Geschwindigkeits*verteilung längs Stromröhren (begrenzt durch deren Stromlinien) bestimmen.

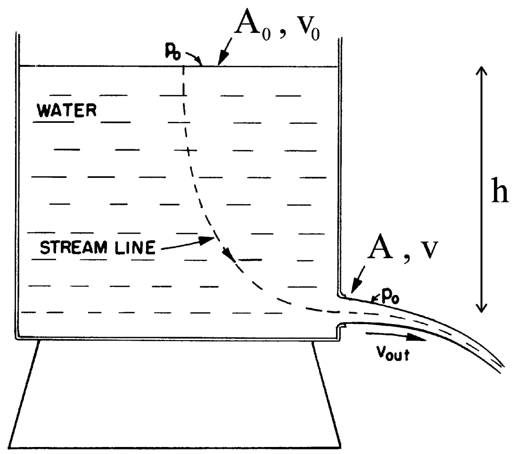
Zwei *“hydrodynamische Paradoxa”*:





“Schwebender Tischtennisball” Apparat von Clément & Desormes

Beispiele & Anwendungen (III)



Ausfluß aus einem Gefäß:

Aus der Bernoulli-Gleichung folgt:

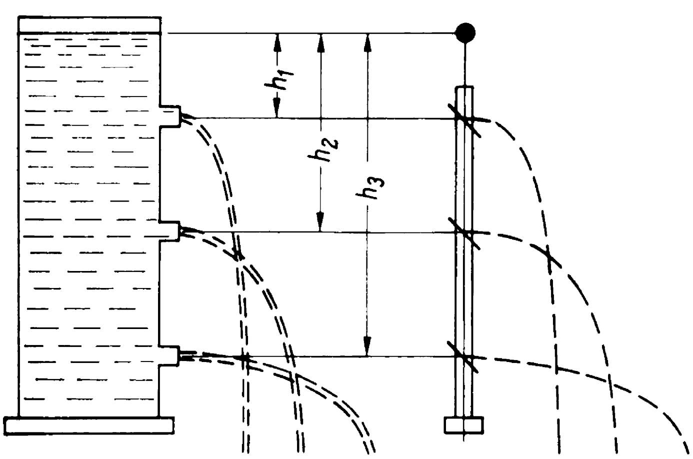
$$p + \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2 + \rho g z = const$$

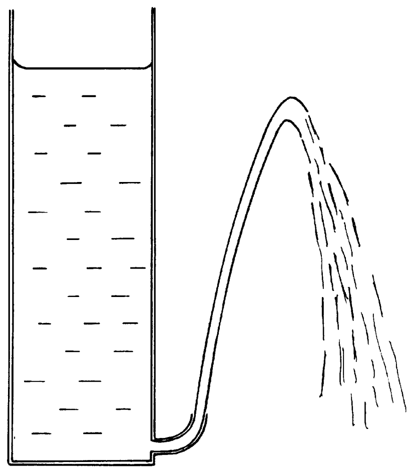
$$\Leftrightarrow \quad \frac{p}{\rho g} + \frac{\mathrm{v}^2}{2g} + z = z_0$$

Da der (Luft-)Druck an beiden Oberflächen (A_0 und A) der selbe ist (p_0) und nach der Kontinuitätsgleichung gilt $A_0\, \mathrm{v}_0 = A\, \mathrm{v}$ folgt:

$$\frac{\mathrm{v}^2}{2g} = \frac{\mathrm{v}_0{}^2}{2g} + h \quad \overset{\mathrm{v}_0 = \frac{A}{A_0}\mathrm{v}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\mathrm{v}^2}{2g} = \frac{\mathrm{v}^2}{2g}\frac{A^2}{A_0{}^2} + h \quad \overset{\frac{A}{A_0} \ll 1 \to 0}{\Leftrightarrow} \quad \mathrm{v} \approx \sqrt{2gh}$$

Die Ausflußgeschwindigkeit ist demnach ebenso groß, wie die Geschwindigkeit eines aus der Höhe *h* herabfallenden Körpers (Satz von Torricelli, 1646).





Die Bernoulli-Gleichung bei (in-)kompressiblen Strömungen

Frage: “Wie groß ist der begangene Fehler, wenn man bei der Bernoulli-Gleichung eine *kompressible* Flüssigkeit als *inkompressible* betrachtet ?”

Bei einer horizontalen Stromröhre gilt im *inkompressiblen* Fall:

$$p_0 - p = \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2$$

Im *kompressiblen* Fall ist dagegen nach (3):

$$\int_a^p \frac{dp}{\rho(p)} + \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 = \int_a^{p_0} \frac{dp}{\rho(p)}$$

Man erhält nach etwas Rechnung folgende Form der Bernoulli-Gleichung:

$$p_0 - p = \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2 \left(1 + \frac{1}{4}\frac{\mathrm{v}^2}{c^2} + \ldots\right)$$

D.h. man begeht beim *“Staudruck”* einen relativen Fehler von $\frac{1}{4}\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}$, das sind bei einer Strömungsgeschwindigkeit von 0,2c etwa 1% , bei 0,63c etwa 10% Fehler.

Literaturhinweise

[1] Budó, A.: ‘Theoretische Mechanik’ (Band 25) - Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956

[2] Schmutzer, Ernst: ‘Grundlagen der theoretischen Physik’ (Teil 1) - Mannheim; Wien; Zürich: B.I. Wissenschafts-verlag 1989

Bilder:

[3] Bergmann; Schaefer: ‘Lehrbuch der Experimental-physik’ (Band 1), 10. Auflage - Berlin; NewYork: de Gruyter 1990

[4] Gerthsen, Christian: ‘Physik’, 18. Auflage - Berlin: Springer 1995

[5] Feynman; Leighton; Sands: ‘The Feynman Lectures on Physics’ (sixth printing) - Addison-Wesley Publishing Company 1977